

Éléments Finis Stabilisés pour les Problèmes de Lubrification Élastohydrodynamique

W. HABCHI^a, D. EYHERAMENDY^b et P. VERGNE^c

a. Lebanese American University (LAU), Byblos, Liban

b. LMA, Ecole Centrale Marseille, CNRS UPR 7051, 13451 Marseille Cedex 20, France

c. Université de Lyon, CNRS INSA-Lyon, LaMCoS, UMR 5259, F-69621, Villeurbanne, France

Résumé :

Ce travail présente un modèle pour les problèmes de lubrification Élastohydrodynamique (EHD). Une approche de type éléments finis avec couplage fort est employée. Les problèmes hydrodynamique et élastique sont résolus simultanément, ce qui conduit à des taux de convergence relativement rapides. Le problème de surface libre en sortie de contact est traité par le biais d'une méthode de pénalisation. Dans le cas de contacts fortement chargés, la solution de type Galerkin standard de l'équation de Reynolds montre un caractère fortement oscillatoire. L'utilisation de techniques de stabilisation est proposée dans ce cas.

Abstract :

This work presents a model for Elastohydrodynamic (EHD) lubrication problems. A finite element full-system approach is employed. The hydrodynamic and elastic problems are solved simultaneously which leads to fast convergence rates. The free boundary problem at the contact's exit is handled by a penalty method. For highly loaded contacts, the standard Galerkin solution of Reynolds equation exhibits a strong oscillatory behaviour. The use of stabilization techniques is proposed to cure spurious oscillations.

Mots clefs: éléments-finis, lubrification élastohydrodynamique, éléments-finis stabilisés, problèmes couplés.

1 Introduction

De nos jours, les roulements sont des composants essentiels pour tout système mécanique comportant des parties tournantes. En effet, le contact direct entre parties en mouvement relatif peut entraîner l'endommagement du système et l'arrêt de son fonctionnement. De plus, des dissipations importantes par frottement sont engendrées, conduisant à une augmentation de la consommation énergétique du mécanisme. Ainsi, les roulements sont couramment utilisés de façon à réduire les aires de contact directes entre les surfaces et à minimiser les pertes énergétiques en interposant un lubrifiant (huile, graisse...) entre les surfaces en contact. Il est ainsi primordial, pour assurer le bon fonctionnement d'un roulement, de disposer d'un outil fiable permettant de prédire à la fois l'épaisseur minimale du film lubrifiant et le frottement dans l'interface.

Ce travail concerne un régime de lubrification particulier dit Élastohydrodynamique (EHD). Dans ce régime, les corps en contact sont séparés par un film complet de lubrifiant et la pression générée à l'intérieur de ce film est suffisamment élevée pour engendrer une déformation élastique significative des corps en contact. Ainsi, il existe un couplage fort entre les effets hydrodynamiques et les effets élastiques. Dans ce papier, les effets thermiques sont considérés négligeables et la température uniforme à travers la zone de contact. Pour l'étude de ce type de contacts il n'est pas nécessaire de considérer les géométries exactes. L'épaisseur de film et la largeur du contact étant généralement trop faibles par rapport aux rayons de courbure des surfaces en mouvement relatif, la géométrie des surfaces en contact peut être approximée par un contact entre une surface plane et une surface parabolique. Deux types de contacts sont considérés : les contacts linéiques (Voir Fig. 1) que l'on trouve principalement dans les roulements à rouleaux cylindriques ou les engrenages par exemple et les contacts circulaires ($R_x=R_y$) présents principalement dans les roulements à billes (Voir Fig. 2).

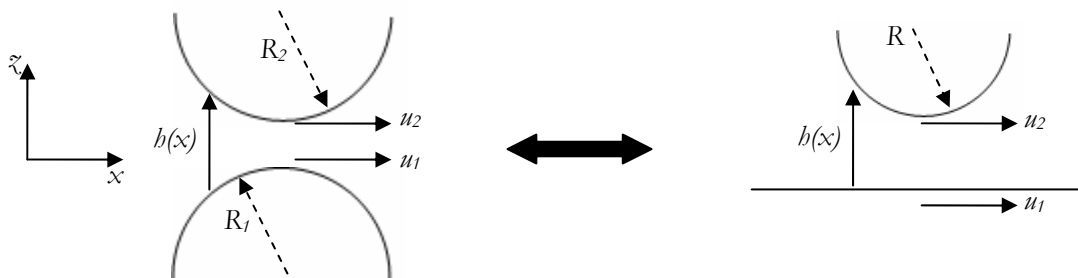


FIG. 1 – Contact EHD linéique et son équivalente géométrie réduite

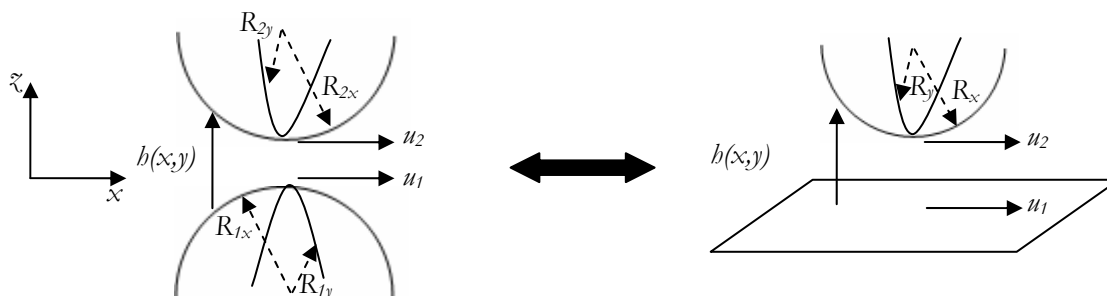


FIG. 2 – Contact EHD ponctuel et son équivalente géométrie réduite

Les trente dernières années ont vu apparaître différentes approches numériques permettant la résolution du problème du contact EHD isotherme lubrifié par un fluide Newtonien. La plupart de ces travaux étaient basés sur un couplage faible entre l'équation de Reynolds (Hydrodynamique) et l'équation de déformation des corps élastiques. Les deux équations étaient ainsi résolues séparément et un processus itératif était établi entre leurs solutions respectives. Cela menait à des taux de convergences relativement lents. Peu de travaux ont tenté de résoudre le problème EHD en adoptant un couplage fort entre les deux équations. Parmi ces travaux, celui de Oh et Rohde [1] ou aussi Holmes et al. [2]. Bien que les modèles présentés dans ces papiers s'avéraient assez intéressants et montraient des taux de convergence extrêmement rapides (seulement quelques itérations étaient suffisantes avant d'atteindre la convergence de la solution), ils présentaient plusieurs faiblesses majeures: le traitement du problème de frontière libre à la sortie du contact était particulièrement difficile, la matrice Jacobienne correspondante était pleine (car le calcul élastique était basé sur la théorie des massifs semi-infinis) et enfin la résolution des cas de contact fortement chargés menait à un caractère oscillatoire de la solution. Ces faiblesses font que ce genre d'approche fut très peu utilisé malgré ses caractéristiques de convergence attirantes.

Dans le travail actuel, les auteurs montrent comment surmonter ces différentes faiblesses afin de pouvoir profiter des propriétés de convergence rapide de cette approche.

2 Théorie et équations du problème EHD

Le problème EHD est défini par 3 équations principales : l'équation de Reynolds qui régit le champ de pression dans la zone de contact, les équations de l'élasticité linéaire qui décrivent la déformation des corps solides et finalement l'équation de l'équilibre des charges qui permet de vérifier l'équilibre global des deux composants en contact. L'équation de Reynolds [3] s'écrit en variables adimensionnées dans le cas d'un contact linéique ou circulaire en régime permanent avec des vitesses de surfaces dans le sens des X :

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla P) - \frac{\partial(\bar{\rho}H)}{\partial X} = 0 \tag{1}$$

$$\text{Avec : } \varepsilon = \frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\mu}\lambda}, \quad \lambda = \frac{12u_m\mu_R R^2}{a^3 p_h}, \quad u_m = \frac{u_1 + u_2}{2} \quad \text{et} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Cette équation découle des équations de Navier-Stokes auxquelles les hypothèses simplificatrices des films minces sont appliquées. La viscosité adimensionnée $\bar{\mu}$ ainsi que la densité adimensionnée $\bar{\rho}$ dépendent de la pression, ce qui rend ce problème fortement non-linéaire et particulièrement difficile à résoudre. En

négligeant les forces volumiques, les équations d'élasticité linéaire consistent à trouver le champ de déplacement $U = \{u, v, w\}$ dans les corps solides (sous l'effet de la pression dans la zone du contact), tel que:

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ avec } \sigma = C \varepsilon_s(U) \quad (2)$$

L'épaisseur de film H renferme 3 termes qui correspondent à la séparation en corps rigides des surfaces, la géométrie initiale non-déformée et la déformation élastique des surfaces:

$$H(X, Y) = H_0 + \frac{X^2 + Y^2}{2} + \delta(X, Y) \text{ avec } \delta(X, Y) = |w(X, Y)| \quad (3)$$

Enfin, l'équation de l'équilibre des charges s'écrit en fonction des variables adimensionnées:

$$\int_{\Omega_c} P(X, Y) d\Omega = \frac{2\pi}{3} \quad (4)$$

Cette équation supplémentaire permet de vérifier que la bonne charge externe est appliquée au contact par le biais de la constante H_0 qui intervient en tant qu'inconnue supplémentaire du problème.

3 Conditions aux limites

L'équation de Reynolds admet les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} p = 0 & \text{sur } \partial\Omega_c \\ p \geq 0 & \text{sur } \Omega_c \text{ et } p = \nabla p \cdot \vec{n}_c = 0 \text{ sur la frontière de cavitation} \end{cases}$$

où \vec{n}_c est la normale sortante à la frontière libre de rupture du film

La deuxième condition découle du fait que la solution de l'équation de Reynolds donne lieu à des pressions négatives qui, en théorie, ne peuvent pas être supportées par le lubrifiant (car celles-ci sont en général inférieures à la pression de vapeur des lubrifiants conventionnels). Un phénomène de cavitation peut apparaître, menant ainsi à la rupture du film à la sortie du contact. La région de pressions négatives n'étant pas connue a priori, il s'agit d'un problème de frontière. Ce dernier sera traité par la suite par le biais d'une méthode de pénalisation qui a le mérite d'être facile à implémenter.

Enfin les conditions aux limites du problème élastique s'écrivent :

$$\begin{cases} U = 0 & \text{dans la profondeur du domaine } \Omega \\ \sigma_n = \sigma \cdot \vec{n} = -P & \text{sur la zone de contact } \Omega_c \\ \sigma_n = 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Les conditions aux limites décrites ici, associées aux équations citées dans le paragraphe précédent permettent de décrire le comportement d'un contact EHD isotherme lubrifié par un fluide Newtonien.

4 Modèle numérique

Dans ce travail, le problème EHD défini par les trois équations décrites précédemment est résolu à l'aide d'une modélisation de type éléments-finis couplés : les équations sont résolues simultanément, menant ainsi à des taux de convergence relativement rapides. Les équations de l'élasticité linéaire sont résolues sur le domaine Ω correspondant aux corps solides alors que l'équation de Reynolds est résolue sur une partie Ω_c de la surface de Ω correspondant à la zone de contact entre les deux solides.

4.1 Formulation de type Galerkin standard

La formulation faible approximée par une méthode éléments-finis de type Galerkin du problème s'écrit:

Trouver $(P, U, H_0) \in S_P \times S_U \times R$ tel que $\forall (W_P, W_U, W_{H_0}) \in S_P \times S_U \times R$:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_c} -\varepsilon \nabla P \cdot \nabla W_P d\Omega + \int_{\Omega_c} \bar{\rho} H \frac{\partial W_P}{\partial X} d\Omega - \int_{\Omega_c} \xi \cdot P^- W_P d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} -C \varepsilon_s(U) \cdot \varepsilon_s(W_U) d\Omega + \int_{\Omega_c} -P \cdot \bar{n} W_U d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega_c} P W_{H_0} d\Omega - \frac{2\pi}{3} W_{H_0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Où: $S_P = \{P \in H^1(\Omega_c) / P = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c\}$ et $S_U = \{U \in H^1(\Omega) / U = 0 \text{ en profondeur}\}$

Le dernier terme apparaissant dans l'équation de Reynolds correspond au terme de pénalisation permettant de forcer les pressions négatives vers zéro [4]. Le système d'équations non-linéaire précédent est résolu par une méthode de Newton-Raphson, ce qui conduit à des propriétés de convergence encore plus intéressantes. Un résultat typique pour un contact circulaire est montré dans la Fig. 3.

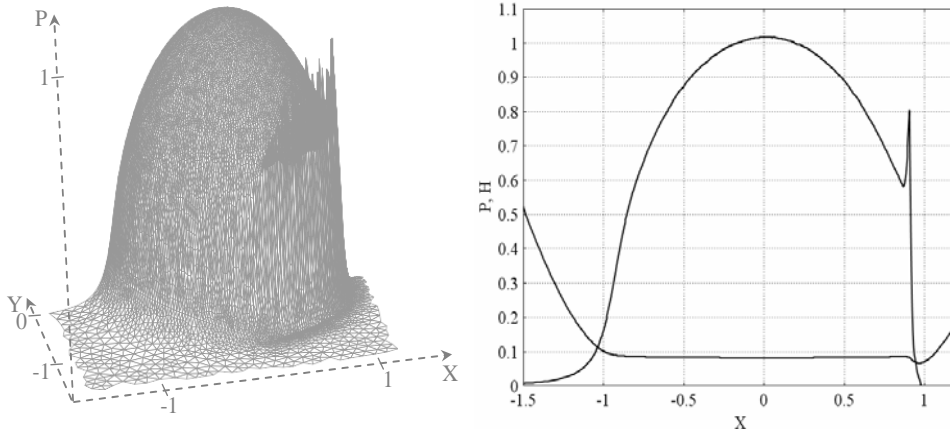


FIG. 3 – Résultat typique d'un contact circulaire. À gauche le profil 3D de pression adimensionnée et à droite les profils de pression et d'épaisseur de film le long de la ligne centrale du contact dans la direction X

Il faut noter la présence du pic de pression et de la constriction de l'épaisseur de film à la sortie du contact. Ces deux particularités sont caractéristiques des contacts EHD. La technique présentée jusque-là permet de surmonter une partie des inconvénients attribués à ce genre d'approche basé sur un couplage fort: le traitement de la frontière libre est relativement simple grâce à l'introduction du terme de pénalisation dans la formulation de l'équation de Reynolds. On peut noter que grâce à la méthode des éléments-finis employée, la matrice Jacobienne du système précédent est creuse. Cependant, des problèmes d'oscillation de solution apparaissent pour des problèmes de contacts fortement chargés.

4.2 Formulations stabilisées

La résolution de l'équation de Reynolds mène à un caractère oscillatoire de la solution quand le contact est fortement chargé (Voir Fig. 4 et 5 (gauche)). En effet, moyennant quelques manipulations mathématiques, l'équation de Reynolds peut s'écrire sous forme d'une équation de convection-diffusion (afin de simplifier l'écriture, le terme de pénalisation sera omis dans la suite de ce paragraphe):

$$R(P) = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla P) + H \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial X} + \bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial X} = 0 \quad (6)$$

Soit $\beta = \beta_x$ pour un contact linéique et $\beta = \{\beta_x, \beta_y\}$ pour un contact circulaire, avec $\beta_x = H \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial P}$ et $\beta_y = 0$. Enfin, soit $Q = -\bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial X}$, alors l'équation précédente s'écrit:

$$R(P) = \underbrace{-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla P)}_{\text{« Diffusion »}} + \underbrace{\beta \cdot \nabla P}_{\text{« Convection »}} - \underbrace{Q}_{\text{« Source »}} = 0 \tag{7}$$

Pour les contacts fortement chargés, le terme de convection devient dominant. Or, la formulation de type Galerkin est connue pour mener à un caractère oscillatoire de la solution de l'équation de convection-diffusion dominée par la convection [5] (Voir Fig. 4 et 5 (gauche)). Il existe dans la littérature différentes techniques permettant de surmonter ce problème. Ces techniques consistent à rajouter des termes supplémentaires à la formulation de type Galerkin, tel que les termes de « Streamline Upwind Petrov Galerkin » (SUPG) [5] ou de « Galerkin Least Squares » (GLS) [5]. Ces termes sont rajoutés à l'intérieur de chaque élément et s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{SUPG: } & \int_{\Omega_{ce}} R(P) \tau (\beta \cdot \nabla W_p) d\Omega \\ \text{GLS: } & \int_{\Omega_{ce}} R(P) \tau (\beta \cdot \nabla W_p - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla W_p)) d\Omega \end{aligned} \tag{8}$$

Où: $\tau = \frac{h_e}{2|\beta|l} \xi(P_e)$ avec: $P_e = \frac{|\beta|h_e}{2\varepsilon l}$ et $\xi(P_e) = \coth(P_e) - \frac{1}{P_e}$
 (h_e : taille de l'élément e, l : ordre d'interpolation)

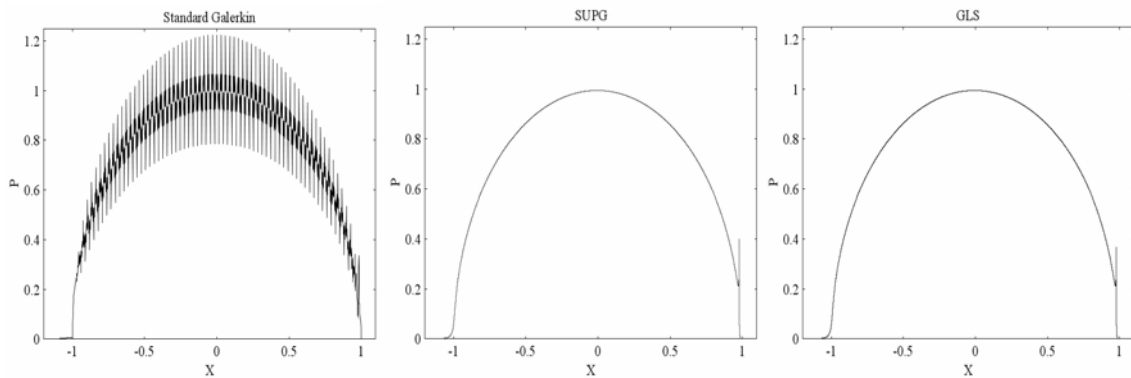


FIG. 4 – Champ de pression adimensionnée pour un contact linéique fortement chargé obtenu avec différentes formulations: Galerkin (gauche), SUPG (milieu) et GLS (droite)

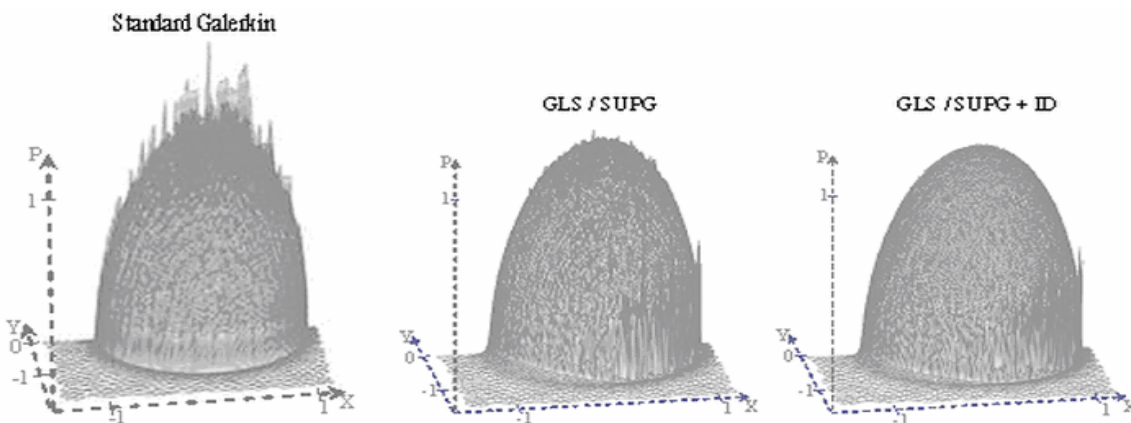


FIG. 5 – Champ de pression adimensionnée pour un contact circulaire fortement chargé obtenu avec différentes formulations: Galerkin (gauche), GLS ou SUPG (milieu) et GLS ou SUPG + ID (droite)

L'ajout de ces termes dans le cadre d'un contact linéique permet de stabiliser la solution et de faire complètement disparaître les oscillations (Voir Fig. 4 (milieu et droite)). Par contre, pour un contact circulaire, cela permet uniquement d'amortir les oscillations sans toutefois les faire disparaître (Voir Fig. 5 (Milieu)). Afin de les faire disparaître, un terme supplémentaire de type « Isentropic Diffusion » (ID)

[5] est rajouté aux termes SUPG ou GLS. Ce dernier s'écrit sous la forme:

$$\text{ID: } \int_{\Omega_{ce}} \frac{h_e |\beta|}{2l} \nabla P \cdot \nabla W_p d\Omega \quad (9)$$

L'ajout de ce terme supplémentaire permet de faire complètement disparaître les oscillations restantes (Voir Fig. 5 (droite)).

5 Conclusion

Ce papier présente un modèle éléments-finis pour la modélisation des problèmes de contacts EHD isothermes lubrifiés avec un fluide Newtonien. La solution est basée sur un couplage fort des différentes équations qui permet d'atteindre des taux de convergence relativement rapides. Ce genre d'approche a toujours souffert de trois faiblesses majeures: le traitement du problème de frontière libre à la sortie du contact était particulièrement difficile, la matrice Jacobienne correspondante était pleine (car le calcul élastique était basé sur la théorie des massifs semi-infinis) et enfin la résolution des cas de contact fortement chargés menait à un caractère oscillatoire de la solution. Dans ce travail, les auteurs montrent comment surmonter ces trois inconvénients. Le problème de la frontière libre est traité par le biais d'une méthode de pénalisation qui est relativement simple à implémenter. La matrice Jacobienne est rendue creuse grâce à l'utilisation d'une approche de type élasticité linéaire pour le problème élastique et de l'approximation éléments-finis. Le problème des oscillations à fortes charges est résolu par l'introduction de formulations stabilisées appropriées. L'utilisation d'un algorithme de type Newton-Raphson pour la résolution du système d'équations non-linéaire résultant permet d'avoir des propriétés de convergence encore plus intéressantes. Enfin, d'un point de vue pratique, les problèmes de lubrifications sont véritablement multiphysiques. L'intérêt de cette approche est qu'elle peut être appliquée à des modèles d'équations plus complexes afin de prendre en compte des comportements rhéologiques de lubrifiants plus réalistes, voire les effets thermiques dans le contact.

Références

- [1] Oh KP and Rohde SM. Numerical Solution of the Point Contact Problem Using the Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1977; **11**: 1507-1518.
- [2] Holmes MJA, Evans HP, Hughes TG and Snidle RW. Transient Elastohydrodynamic Point Contact Analysis Using a New Coupled Differential Deflexion Method. Part I: Theory and Validation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Journal of Engineering Tribology* 2003; **217 (J)**: 289-303.
- [3] Reynolds O. On the Theory of the Lubrication and its Application to Mr Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 1886; **177**: 157-234.
- [4] Wu SR. A Penalty Formulation and Numerical Approximation of the Reynolds-Hertz Problem of Elastohydrodynamic Lubrication. *International Journal of Engineering Science* 1986; **24 (6)**: 1001-1013.
- [5] Hughes TJR. Multiscale Phenomena: Green's Functions, the Dirichlet-to-Neumann Formulation, Subgrid Scale Models, Bubbles and the Origins of Stabilized Methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1995; **127**: 387-401.